

УДК 532.59

## АНАЛІЗ ЕНЕРГІЇ ХВИЛЬОВОГО РУХУ В ДВОШАРОВИХ ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

**О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий, В.В. Нарadowий**

Для різних двошарових систем отримані аналітичні вирази для оцінки енергії хвильового руху та досліджені залежності повної енергії від геометричних та фізичних параметрів систем.

For different two-layer systems the analytical expressions for the evaluation of the energy of the wave movement are obtained and the total energy dependence on geometrical and physical parameters of the systems is investigated.

Дослідження енергетичних характеристик в прикладних задачах гідродинаміки є однією з важливих задач сучасних дослідників. Дослідження стійкості хвиль та аналіз енергії хвильових рухів в шаруватих рідинах є одним із важливих завдань сучасної гідродинаміки. Вивченню цих питань присвячують свою увагу значна кількість зарубіжних та вітчизняних дослідників, серед яких Camassa (2006), Choi (2006), Viotti(2012), Селезов (2012), Черкесов (2008), Доценко (2011), Стеценко (2010) та ін.

Основним завданням роботи є отримання аналітичних виразів для енергії хвильового руху в різних двошарових системах в лінійному наближенні; дослідження залежності повної енергії розглядуваних систем від геометричних та фізичних параметрів.

Наведемо розв'язки та дисперсійні співвідношення лінійних задач про поширення хвиль в різних гідродинамічних системах.

В системі «півпростір - півпростір»:

$$\eta^{(1)} = 2A \cos(kx - \omega_1 t),$$

(1)

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{2\omega_1 A \sin(kx - \omega_1 t) e^{kz}}{k}, \quad \varphi_2^{(1)} = -\frac{2\omega_1 A \sin(kx - \omega_1 t) e^{-kz}}{k},$$

дисперсійне співвідношення: 
$$\omega_1^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{(1 + \rho)}.$$

В системі «півпростір – шар з твердою кришкою»:

$$\eta^{(2)} = 2A \cos(kx - \omega_2 t),$$

(2)

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{2\omega_2 A \sin(kx - \omega_2 t) e^{kz}}{k}, \quad \varphi_2^{(2)} = -\frac{2\omega_2 A \sin(kx - \omega_2 t) \cosh(k(h_2 - z))}{k \sinh(kh_2)},$$

дисперсійне співвідношення: 
$$\omega_2^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{(1 + \rho \coth(kh_2))}.$$

В системі «шар з твердим дном – шар з твердою кришкою»:

$$\eta^{(3)} = 2A \cos(kx - \omega_3 t), \tag{3}$$

$$\varphi_1^{(3)} = \frac{2\omega_3 A \sin(kx - \omega_3 t) \cosh(k(h_1 + z))}{k \sinh(kh_1)}, \quad \varphi_2^{(3)} = -\frac{2\omega_3 A \sin(kx - \omega_3 t) \cosh(k(h_2 - z))}{k \sinh(kh_2)},$$

дисперсійне співвідношення:

$$\omega_3^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2)}.$$

У виразах (1) – (3)  $\varphi_i^{(j)}$  - потенціал швидкості у  $i$ -му шарі,  $\eta^{(j)}$  - відхилення поверхні контакту,  $h_i$  - товщина  $i$ -го шару,  $\omega_j$  - частота хвилі,  $k$  - хвильове число,  $\rho = \rho_2 / \rho_1$  - відношення густин рідких шарів,  $T$  - коефіцієнт поверхневого натягу на поверхні контакту ( $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ ).

Розв'язки даних задач в такому вигляді були отримані: А. Найфе для задачі поширення хвиль в системі «півпростір - півпростір» [5], О. Авраменко для задачі поширення хвиль в системі «півпростір – шар з твердою кришкою» [2], Ю. Гуртовим для задачі поширення хвиль в системі «шар з твердим дном – шар з твердою кришкою» [3].

Для знаходження аналітичних виразів для енергії хвильового руху скористаємось методикою, наведеною в [1, 4]. Відмітимо, що загальна енергія системи буде дорівнювати сумі енергій нижнього та верхнього шарів. Використовуючи розв'язки (1) – (3) маємо наступні аналітичні результати.

Для системи «півпростір - півпростір»:

$$\begin{aligned}
 E_1^{(1)} &= -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} dz \right) dt = \frac{2\pi \omega_1^2 A^2}{k^2}, \\
 E_2^{(1)} &= -\rho \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left( \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial t} dz \right) dt = \rho \frac{2\pi \omega_1^2 A^2}{k^2}, \\
 E^{(1)} &= \frac{4\pi \omega_1^2 A^2}{k^2} (1 + \rho)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для системи «півпростір – шар з кришкою»:

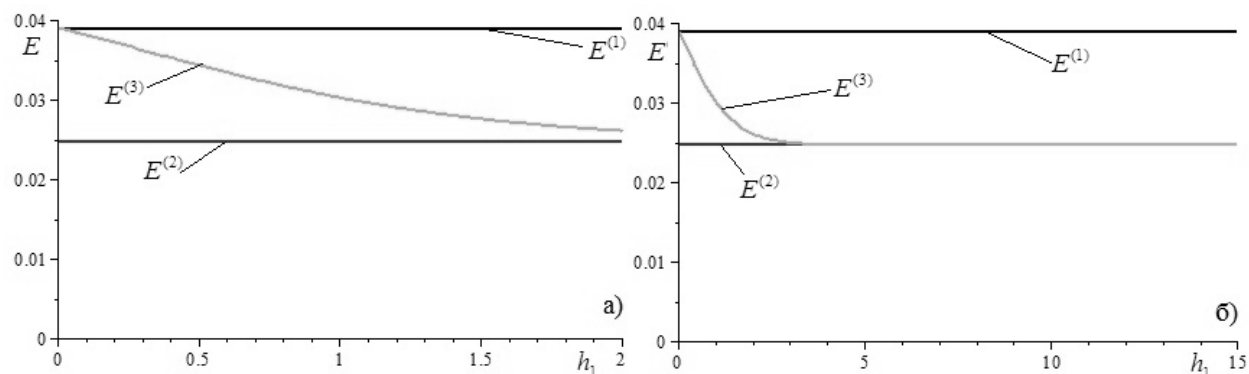
$$\begin{aligned}
 E_1^{(2)} &= -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_2}} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial t} dz \right) dt = \frac{2\pi \omega_2^2 A^2}{k^2}, \\
 E_2^{(2)} &= -\rho \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_2}} \left( \int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial t} dz \right) dt = \frac{2\pi \omega_2^2 (\cosh(kh_2) \sinh(kh_2) + kh_2) A^2}{k^2 \sinh^2(kh_2)}, \\
 E^{(2)} &= \frac{2\pi \omega_2^2 A^2}{k^2 \sinh^2(kh_2)} (\sinh^2(kh_2) + \rho \cosh(kh_2) \sinh(kh_2) + \rho kh_2).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Для системи «шар з твердим дном – шар з кришкою»:

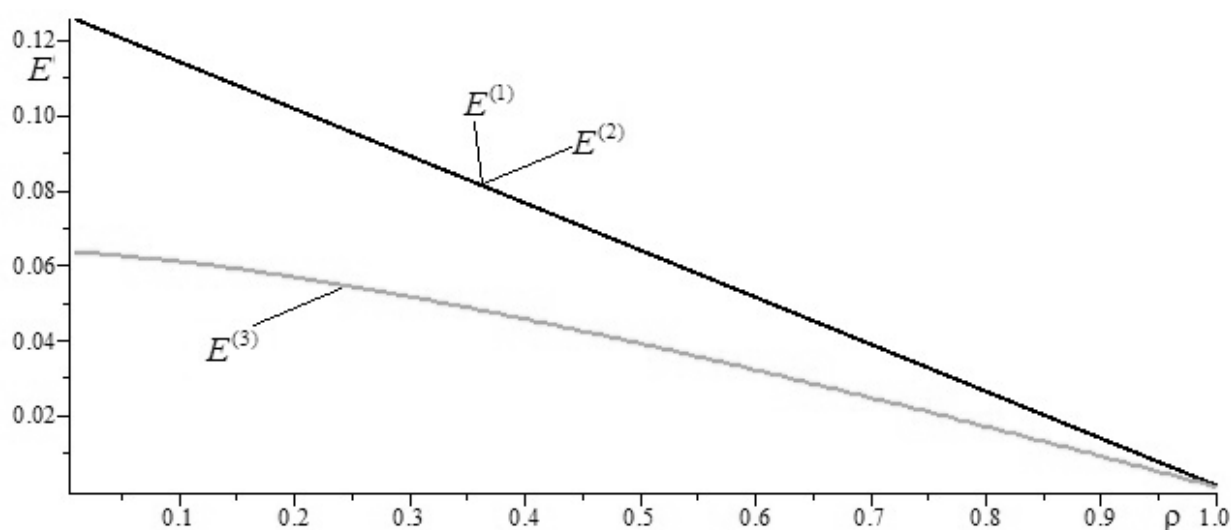
$$\begin{aligned}
 E_1^{(3)} &= -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_3}} \left( \int_{-h_1}^0 \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial t} dz \right) dt = \frac{2\pi \omega_3^2 (\cosh(kh_1) \sinh(kh_1) + kh_1) A^2}{k^2 \sinh^2(kh_1)}, \\
 E_2^{(3)} &= -\rho \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_3}} \left( \int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi_2^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(3)}}{\partial t} dz \right) dt = \rho \frac{2\pi \omega_3^2 (\cosh(kh_2) \sinh(kh_2) + kh_2) A^2}{k^2 \sinh^2(kh_2)}, \\
 E^{(3)} &= \frac{2\pi \omega_3^2 A^2}{k^2} \left( \frac{\cosh(kh_1) \sinh(kh_1) + kh_1}{\sinh^2(kh_1)} + \rho \frac{\cosh(kh_2) \sinh(kh_2) + kh_2}{\sinh^2(kh_2)} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

У виразах (4) – (6)  $E_i^{(j)}$  – енергія  $i$ -го шару,  $E^{(j)} = E_1^{(j)} + E_2^{(j)}$  ( $i=1,2$ ,  $j=1,2,3$ ).

Таким чином, згідно [4], вирази (4) – (6) дають змогу обчислювати повну енергію хвильового руху в лінійному наближенні для систем «півпростір – півпростір», «півпростір – шар з кришкою», «шар з твердим дном – шар з кришкою».

Рис. 1. Залежність  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  та  $E^{(3)}$  від товщини нижнього шару  $h_1$ :а)  $h_1 \in [0; 2]$ ; б)  $h_1 \in [0; 15]$ 

Розглянемо залежність  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  та  $E^{(3)}$  від геометричних та фізичних параметрів системи. Спочатку розглянемо залежність від товщини нижнього шару  $h_1$ . З формул (4) – (6) помітно, що  $E^{(1)}$  та  $E^{(2)}$  не залежать від  $h_1$  в силу особливостей моделей. На рис. 1 наведено залежність  $E^{(3)}$  від товщини нижнього шару та значення  $E^{(1)}$  та  $E^{(2)}$ . З рис. 1 а) помітно, що при  $h_1 \rightarrow 0$  енергія системи «шар – шар» наближається до  $E^{(1)}$ , а при  $h_1 \rightarrow \infty$  отримаємо, що  $E^{(3)} \rightarrow E^{(2)}$  (рис. 1 б). Далі розглянемо залежність величин  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  та  $E^{(3)}$  від відношення густин  $\rho$  (рис. 2).

Рис. 2. Залежність  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  та  $E^{(3)}$  від відношення густин  $\rho \in [0; 1]$

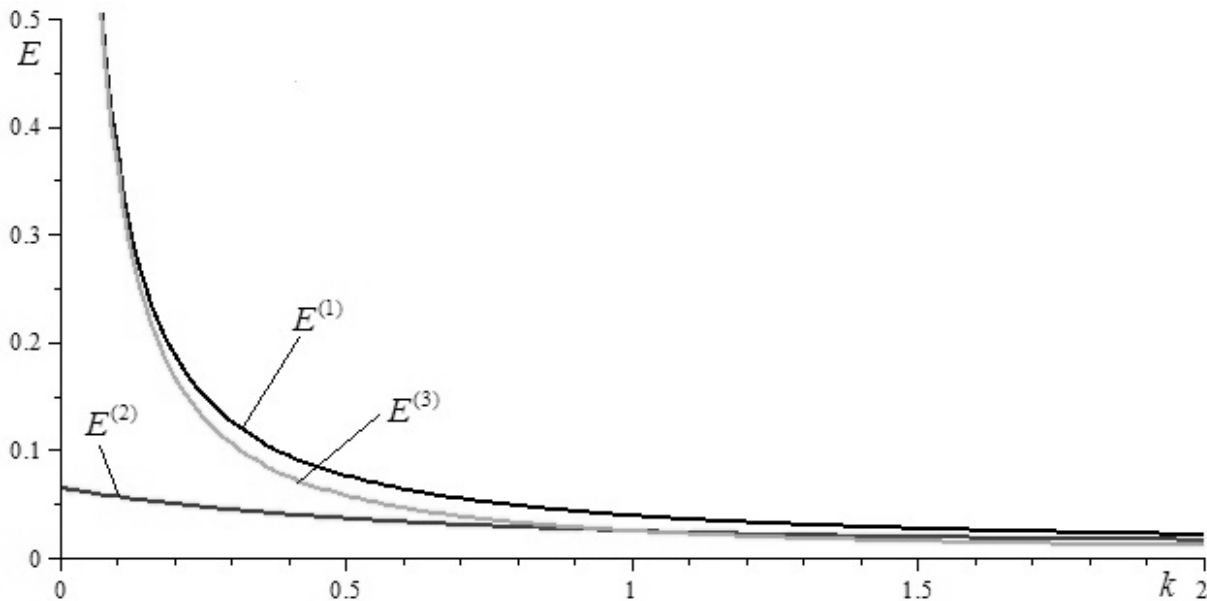


Рис. 3. Залежність від хвильового числа  $k$

Як видно з рис. 2 значення  $E^{(1)}$  та  $E^{(2)}$  співпадають між собою. У випадку  $\rho = 0$  перші дві системи вироджуються в півпростір, а система «шар – шар» в просто один шар рідини. У випадку  $\rho = 1$  повна енергія всіх трьох систем рівна нулю. Також, на рис. 2 видно, що значення  $E^{(3)}$  менше за значення  $E^{(1)}$  та  $E^{(2)}$ . Далі розглянемо залежність  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  та  $E^{(3)}$  від хвильового числа  $k$ . Вказані залежності наведені на рис. 3.

Як помітно з рис. 3 при малих хвильових числах, які відповідають довгим гравітаційним хвилям,  $E^{(1)} > E^{(3)} > E^{(2)}$ . При збільшенні хвильового числа (зменшенні довжини хвилі) отримуємо, що  $E^{(1)} > E^{(2)} > E^{(3)}$ .

Відмітимо, що всі вказані дослідження та результати мають якісний характер, оскільки розв'язки (1) – (3) були наведені в безрозмірному вигляді. Всі аналітичні перетворення та графічні побудови виконані з використанням математичного пакету символьних обчислень Maple.

## ПОСИЛАННЯ

- [1] Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В., Нарадовий В.В. Оцінка енергії хвильового руху у двошаровій рідині з твердим дном та вільною поверхнею // *Вісник КНУ ім. Т.Г.Шевченка*. – Київ, 2013. – С. 42–49.
- [2] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // *Прикладна гідромеханіка*. – 2005. – Том 7(79), № 1. - С. 80–89.
- [3] Селезов И.Т., Авраменко О.В. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // *Прикладна гідромеханіка*. – 2002. – Т.4(76), М. – С. 3–13.
- [4] Тарапов И.Е. *Механика сплошной среды*. В 3 ч. Ч. 3: *Механика невязкой жидкости*. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.
- [5] Nayfeh A.H. Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves // *J.Fluid Mech.* – 1973. – 59. – P. 803–816.